9 Direktni produkt grup

Definicija (kartezični produkt)
Kartezični produkt množic $S_1, S_2, ..., S_n$ je množica vseh urejenih n-teric $(a_1, a_2, ..., a_n)$, kjer je $a_i \in S_i$ za $i = 1, 2, ..., n$. Kartezični produkt pišemo kot: $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ ali $\prod_{i=1}^{n} S_i$.

1. Naj bosta $(G_1, *)$ in $(G_2, \circ)$ grupi. Za $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in G_1 \times G_2$ definirajmo operacijo množenja po komponenah

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 * b_1, a_2 \circ b_2).$$

Pokaži, da je $G_1 \times G_2$ skupaj s to operacijo grupa. [$a_i \in G_i, b_i \in G_i$, $a_1 * b_1 \in G_1$, $a_2 * b_2 \in G_2$]

2. Napiši vse elemente grupe $U(8) \times U(10)$. Izračunaj $(3, 7) \cdot (5, 3)$ in $(3, 7) \cdot (7, 9)$. [$(7, 1)$, $(5, 3)$]

3. Napiši vse elemente grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Pokaži da je $\mathbb{Z}_6$ ciklična grupa, ter pokaži da je $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$. [napiši, Cayley-evo tabelo]

Izrek (direktni produkt grup)
Naj bodo $G_1, G_2, ..., G_n$ grupe. Za $(a_1, a_2, ..., a_n)$ in $(b_1, b_2, ..., b_n)$ v $\prod_{i=1}^{n} G_i$ definirajmo operacijo množenja po komponentah

$$(a_1, a_2, ..., a_n)(b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, ..., a_n b_n).$$

Potem je $\prod_{i=1}^{n} G_i$ skupaj s to operacijo grupa, ki jo imenujemo direktni produkt grup G_i.

4. Dokaži izrek zgoraj. [$a_i \in G_i, b_i \in G_i$, $a_i b_i \in G_i$]

5. Poišči vse homomorfizme iz grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ v grupo $\mathbb{Z}_4$. [4]

6. Do izomorfizma natanko poišči vse grupe reda 4. [$G \cong \mathbb{Z}_4$, $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$]

7. Poišči vse podgrupe grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. [8]

8. Naj bo $(g, h) \in G \times H$. Pokaži da je red elementa (g, h) enak najmanjšem skupnemu večkratniku redov elementov g in h.

Izrek (red elementa v direktnom produktov)

$$|(g_1, g_2, ..., g_n)| = \mathrm{lcd}(|g_1|, |g_2|, ..., |g_n|)$$

9. Dokaži izrek zgoraj.

10. Poišči rede vseh elementov grupe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$. [$|(0, 3)| = \mathrm{lcd}(|0|, |3|) = \mathrm{lcd}(1, 2) = 2$]

11. Določi število elementov reda 5 v grupi $\mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_5$. [obstaja 24 element reda 5]

Spomnimo se fundamentalnega izreka za ciklične grupe:

Izrek (fundamentalni izrek za ciklične grupe)
Vsaka podgrupa ciklične grupe je ciklična. Poleg tega, če je $|\langle a \rangle| = n$, potem je red katere koli podgrupe grupe $\langle a \rangle$ deljitelj števila n. Za vsaki pozitivni deljitelj k števila n, ima grupa $\langle a \rangle$ natanko eno podgrupo reda k - in sicer $\langle a^{\frac{n}{k}} \rangle$.

12. Dokaži fundamentalni izrek za ciklične grupe zgoraj.

Definicija (Eulerjeva funkcija fi)

Naj bo $\phi(1) = 1$, in za vsako celo število $n > 1$, označimo z $\phi(n)$ število pozitivnih celih števil, ki so manjša od n, in so tuja z n. Tako definirano funkcijo $\phi(n)$ imenujemo Eulerjeva funkcija fi. Opazimo, da iz definicije grupe $U(n)$ sledi, da $|U(n)| = \phi(n)$. Prvih 12 vrednosti funkcije $\phi(n)$ je danih v naslednji tabeli.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Izrek (število elementov reda d v ciklični grupi)

Če je d pozitivno celo število ki deli n, potem je število elemenatov reda d v ciklični grupi reda n eneko $\phi(d)$.

13. Dokaži izrek zgoraj.

14. Določi število cikličnih podgrup reda 10 v grupi $\mathbb{Z}_{100} \times \mathbb{Z}_{25}$.

[obstaja 6 cikličnih podgrup reda 10]

Izrek (kriterij da je $G \times H$ ciklična)

Naj bosta G in H končni ciklični grupi. Potem je $G \times H$ ciklična če in samo če sta $|G|$ in $|H|$ tuji.

15. Dokaži izrek zgoraj.

16. Ugotovi, ali sta dani grupi izomorfni in poišči eksplicitni izomorfizem, če sta:

(a) $\mathbb{Z}_6$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$; [$(1,1)$ generira $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, grupi sta izomorfni]

(b) $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; [grupa $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ni ciklična, grupi nista izomorfni]

(c) $\mathbb{Z}_{30}$ in $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. [lahko definiramo izomorfizem $\phi(k) = (k \bmod 2,\ k \bmod 3,\ k \bmod 5)$]

17. Pokaži, da je $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ izomorfna ciklični grupi $\mathbb{Z}_{m \cdot n}$ natanko tedaj ko sta m in n tuji si števili.

Izrek (fundamentalni izrek o končno generiranih abelskih grupah)

Vsaka končna abelska grupa G je izomorfna direktnemu produktu cikličnih grup v obliki

$$\mathbb{Z}_{p_1{}^{\alpha_1}} \times \mathbb{Z}_{p_2{}^{\alpha_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_k{}^{\alpha_k}}$$

kjer so p_i praštevila (ki niso nujno različna) in $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

18. Do izomorfizma natanko poišči vse Abelove grupe reda

(a) 36; [4]

(b) 80; [5]

(c) 540. [6]

red	*grupe*
1	$\{0\}$
2	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_3$
4	$\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5	$\mathbb{Z}_5$
6	$\mathbb{Z}_6$, S_3
7	$\mathbb{Z}_7$
8	$\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, D_4, Q
9	$\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$
10	$\mathbb{Z}_{10}$, D_5

Opomba. Z dosedaj zbranim znanjem lahko zapišemo seznam vseh grup do reda 10 (glej tabelo levo).